

Problème 100 – Le match nul du chifoumi

Niveau : Première (Spécialité Maths)

Chapitre : Probabilités, Variables aléatoires, Algorithmique (Python)

Inédit, publié le 07/03/2020



Il est un de ces jeux connus partout dans le monde, et qui n'ont pas besoin de langue. Le chifoumi, connu en France sous le nom Pierre-Feuille-Ciseaux, est extrêmement simple à comprendre et il permet, à la manière d'un pile ou face, de laisser le hasard décider d'une situation. Pour ceux (y en a-t-il ?) qui ne connaîtraient pas le jeu, le principe, pour sa version la plus « standard », consiste pour deux joueurs à montrer simultanément (on parlera dans ce problème de « rencontre ») un des trois coups possibles - pierre, feuille ou ciseaux - en le symbolisant de la main. La pierre bat les ciseaux (en les écrasant), les ciseaux battent la feuille (en la coupant), la feuille bat la pierre (en la recouvrant). Ainsi, sur une rencontre, chaque signe peut permettre de gagner, de perdre, ou de faire « nul » (si les deux joueurs montrent le même signe) – les 3 possibilités étant équiprobables. Tant que les deux joueurs font « nul », ils recommencent le processus jusqu'à ce qu'un des deux joueurs gagne une rencontre, et donc la partie.

Il est naturel de penser que quand on joue à chifoumi, la chance de gagner une partie contre un adversaire est de 1 sur 2 (car aucun joueur n'a à priori d'avantage sur l'autre). Toutefois, si des joueurs font un nombre déterminé de rencontres, il n'est jamais à exclure que les joueurs montrent à chaque fois le même signe, ce qui voudrait dire qu'ils font match nul au final. Dans ce problème, on va essayer de comprendre la petite perturbation qu'engendre la possibilité de match nul.

Alexia et Boris font une partie de chifoumi. On appelle X la variable aléatoire représentant le nombre de rencontres dans la partie entre Alexia et Boris (qui va jusqu'à la rencontre (inclusive) où un joueur bat l'autre).

1) a) Donner toutes les valeurs possibles de X .

b) Calculer $P(X=1)$, $P(X=2)$ et $P(X=3)$.

c) En vous appuyant sur un arbre de probabilités, justifier que pour tout entier $k \geq 1$, $P(X = k) = \frac{2}{3^k}$.

2) On cherche à déterminer pour quelle valeur n au minimum, Alexia et Boris ont strictement moins d'une chance sur 1 million de faire plus de n rencontres.

a) Expliquer pourquoi la question équivaut à chercher la valeur minimale de n telle que :

$$\sum_{k=1}^n P(X = k) \geq 1 - 10^{-6}.$$

b) Remplissez le programme Python ci-dessous afin qu'il puisse fournir une réponse à la question.

```
1 s=0
2 k=...
3 while s< ..... :
4     k=.....
5     s=.....
6 print ('La réponse à la question est:',..... )
```

c) Utiliser la calculatrice (ou si possible : exécuter le programme Python de la question b)) pour donner une réponse à la question.

3) Pour éviter qu'une partie ne s'éternise, Alexia et Boris décident de faire au maximum un nombre fixé m de rencontres, ce qui signifie qu'ils ne désigneront pas de vainqueur s'ils font m rencontres d'affilée au résultat « nul ».

a) Montrer que dans ce cas, $P(X = m) = \frac{1}{3^{m-1}}$.

b) Calculer, en fonction de m , la probabilité pour que la partie se termine par un match nul.

c) En déduire alors la probabilité p pour qu'Alexia batte Boris.

d) Calculer p pour $m = 2$, $m = 5$ et $m = 10$. Qu'observe-t-on ? Interpréter le résultat.